Résumé

d'un Mémoire sur les rapports qui existent
entre le calcul des Résidus et le calcul des limites ;
et sur les avantages que présentent ces deux nouveaux calculs
dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes

par M. Augustin Cauchy
membre de l'Institut de France

Turin. 1831.

Sur les rapports qui existent
entre le Calcul des Résidus et le Calcul des limites ;
et sur les avantages que présentent ces deux nouveaux calculs
dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes.
(lu à l'Académie de Turin, dans la séance du 27 nov. 1831).

Dans le mémoire que j'ai eu l'honneur de présenter le 11 octobre dernier à l'Académie, j'ai posé les bases du nouveau calcul que je désigne sous le nom de calcul des limites ; et après avoir montré comment on peut le faire servir à la détermination des limites des erreurs commises dans le développement des fonctions explicites, quand on arrête les séries après un certain nombre de termes, j'ai indiqué plusieurs théorèmes à l'aide desquels on pouvait étendre l'application du même calcul au développement des fonctions implicites. J'ai ajouté que, sans recourir à ces théorèmes on pouvait établir directement des règles dignes de remarque sur la convergence des séries qui représentent les développements des fonctions implicites, et sur la fixation des limites supérieures aux modules des restes qui complètent les séries. L'exposition de ces règles, la recherche de ces limites, ainsi que la détermination du nombre et des valeurs des diverses racines d'une équation algébrique ou transcendante, ou simplement des racines qui remplissent des conditions données, forment la matière du nouveau mémoire. Plusieurs des propositions qu'il renferme me paraissent dignes, par leur importance et leur nouveauté, de fixer un moment l'attention des géomètres. Pour en donner une idée, je me contenterai d'en citer ici quelques unes.

Soient x une variable réelle et $f(x)$ une fonction de cette variable qui devienne infinie pour $x=a$. Si l'on fait croître x, la fonction $f(x)$ passera, en devenant infinie, du négatif au positif, ou du posi-

tif au négatif, ou bien elle ne changera pas de signe. La quantité +1, dans le premier cas, −1, dans le second, zéro, dans le troisième, est ce que je nomme l'<u>indice</u> de la fonction, pour la valeur donnée a de la variable x. J'appelle indice intégral pris entre deux limites données $x=x_0$, $x=X$, la somme des indices correspondants aux valeurs de x qui rendent la fonction infinie entre ces limites; et je désigne cet indice intégral par la lettre $\mathcal{J}$, suivie de doubles parenthèses dont l'usage est le même que dans le calcul des Résidus, et accompagnée des limites x_0, X, que l'on écrit à la suite de la lettre $\mathcal{J}$, comme on écrit à la suite de la lettre $\int$ les limites d'une intégrale définie. Cela posé, je fais voir 1° que la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires des équations algébriques ou transcendantes se réduit à la détermination des indices des fonctions, 2° que la détermination de l'indice d'une fraction rationnelle peut être ramenée à la recherche du plus grand commun diviseur algébrique entre les polynomes qui composent ses deux termes. Il y a plus. Soient x, y deux variables réelles,

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

une variable imaginaire, et $f(z)$ une fonction réelle ou imaginaire de z. Concevons que, x, y étant considérées comme des coordonnées rectangulaires, on trace, dans le plan des x, y, un contour $OO'O''\ldots$ formé d'une ou de plusieurs lignes droites ou courbes. Soit s une longueur variable mesurée sur ce contour, à partir d'un point fixe et dans le sens du mouvement de rotation direct. Enfin posons

$$f(z) = \varphi + \chi\sqrt{-1},$$

φ, χ désignant deux fonctions réelles de x, y; et soit $\psi(s)$ la fonction de s à laquelle se réduit le rapport $\frac{\varphi}{\chi}$ quand on exprime les coordonnées x, y par le moyen de l'arc s. Chacune des racines

réelles ou imaginaires de l'équation

$$f(z)=0$$

offrira une partie réelle et un coefficient de $\sqrt{-1}$ qui seront des valeurs de x, y propres à représenter les coordonnées d'un point situé en dedans ou en dehors du contour $OO'O''$... Cela posé, je démontre 1° que le nombre des racines correspondantes à des points renfermés dans le contour $OO'O''$.... est la moitié de l'indice intégral de la fonction $\psi(s)$ étendu au périmètre entier de ce contour; 2° que le résidu intégral d'une fonction quelconque de z, étendu à toutes les racines dont il s'agit, peut être exprimé par une intégrale définie très simple et relative à l'arc s. Cette dernière proposition fournit immédiatement les diverses formules générales que j'ai données pour la détermination des intégrales définies dans un mémoire présenté à l'institut en 1814, dans les Exercices de Mathématiques, et dans les Annales de M. de Gergonne. Elle offre le moyen de représenter par une seule intégrale définie la somme des racines correspondantes à des points renfermés dans le contour $OO'O''$..., ou la somme de fonctions semblables de ces racines. Lorsque, la fonction $f(z)$ étant décomposée en deux parties $\Pi(z)$, $\varpi(z)$, le module du rapport

$$\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}$$

est, pour tous les points situés sur le contour $OO'O''$...., inférieur à l'unité, le nombre des racines correspondantes à des points renfermés dans ce contour reste le même pour les deux équations qu'on obtient en égalant à zéro la fonction $f(z)$ ou sa première partie $\Pi(z)$; et la somme des racines de l'équation $f(z)=0$, ou la somme des fonctions semblables de ces racines peut être développée en une série convergente dont les différents termes ne contiennent plus que les racines

de l'équation $\Omega(z)=0$. On reconnait ainsi que le théorème énoncé par M. Laplace dans les mémoires de l'Académie Royale des Sciences de 1777 est inexact toutes les fois que le nombre désigné par i dans ce théorème diffère de l'unité, et que le théorème substitué par M. Paoli au théorème de Laplace cesserait lui-même d'être exact, si le premier membre de l'équation que l'on considère ne remplissait pas certaines conditions. Ajoutons qu'à l'aide des principes ci-dessus indiqués la détermination du nombre des racines d'une équation algébrique qui correspondent à des points situés dans le contour OO'O''... peut s'effectuer très simplement toutes les fois que ce contour est uniquement composé de droites ou d'arcs de cercles ou même de courbes tellement choisies que, pour tous les points situés sur chacune d'elles, x et y puissent être exprimés rationnellement en fonction d'une troisième variable t. Ainsi, l'opération connue sous le nom de division algébrique suffira pour déterminer combien de racines réelles ou imaginaires d'une équation de degré quelconque offrent des modules inférieurs à un nombre donné, ou des parties réelles comprises entre des limites données, etc.... Parmi le grand nombre de théorèmes remarquables auxquels on est conduit de cette manière, se trouvent compris le théorème de Descartes, celui de MM. Budan et Fourier, ceux que j'ai moi-même établis dans le journal de l'école polytechnique, ceux que M. Ch. Sturm a publiés dans le bulletin des sciences de juin 1829, etc.... Quant à la détermination des limites des erreurs commises dans le développement des fonctions implicites, elle devient encore plus simple et plus facile, lorsqu'on a égard aux principes que je viens de résumer en peu de mots.

Formules extraites
du Mémoire présenté le 27 Novembre 1831
à l'Académie des sciences de Turin
par M. Augustin Cauchy membre de l'Institut de France

Soient x, y deux variables réelles, considérées comme représentant des coordonnées rectangulaires,

$z = x + y\sqrt{-1}$ une variable imaginaire,

$OO'O''\ldots$ un contour ou un polygone composé d'une ou de plusieurs lignes droites ou courbes, et tracé arbitrairement dans le plan des x, y,

I l'un quelconque des points renfermés dans le contour $OO'O''\ldots$,

s une longueur variable comptée positivement sur ce contour à partir d'un point donné O, et dans un sens tel que, la longueur s venant à croître, le rayon vecteur mené du point I à l'extrémité de cette longueur ait, dans le plan des x, y, un mouvement de rotation direct autour du point I,

c le périmètre entier du contour $OO'O''\ldots$

$f(z)$ une fonction réelle ou imaginaire de z, qui obtienne généralement une valeur unique et déterminée pour chacun des systèmes de valeurs de x, y, propres à représenter les coordonnées des points renfermés dans le contour $OO'O''\ldots$.

enfin

$$\mathcal{E}((f(z)))$$

le résidu intégral de $f(z)$ étendu à celles des racines de l'équation

$$\frac{1}{f(z)} = 0 \qquad (1)$$

qui correspondent à de semblables valeurs de x, y. Il suffira de recourir à la théorie des intégrales singulières pour établir la formule

(2) $$\mathcal{E}((f(z))) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^c f(z) \frac{dz}{ds} ds.$$

On pourra d'ailleurs décomposer l'intégrale que renferme la formule (2) en plusieurs parties, puis substituer à la variable s, dans chaque intégrale partielle, une autre variable t qui croisse ou décroisse tandis que s augmente. Cela posé, on reconnaîtra sans peine que l'équation (2) comprend comme cas particuliers les formules générales que j'ai données dans le mémoire de 1826, dans les Exercices de Mathématiques, etc.... Ainsi, par exemple, si l'on réduit le contour $OO'O''$... à un rectangle dont les côtés soient parallèles aux axes des x et y, ou bien au système de deux droites menées par l'origine des coordonnées et de deux arcs de cercle qui aient cette origine pour centre, ou bien encore à la circonférence entière d'un cercle décrit de cette origine avec le rayon R, on tirera successivement de la formule (2)

$$\mathop{\mathcal{E}}_{x_0\ y_0}^{X\ \ Y}((f(z))) = \frac{1}{2\pi} \int_{y_0}^{Y} \left\{ f(X+y\sqrt{-1}) - f(x_0+y\sqrt{-1}) \right\} dy$$

$$+ \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{x_0}^{X} \left\{ f(x+Y\sqrt{-1}) - f(x+y_0\sqrt{-1}) \right\} dx,$$

$$\mathop{\mathcal{E}}_{(r_0)\ (p_0)}^{(R)\ (P)}((f(z))) = \frac{1}{2\pi} \int_{p_0}^{P} \left\{ R f(Re^{p\sqrt{-1}}) - r_0 f(r_0 e^{p\sqrt{-1}}) \right\} e^{p\sqrt{-1}} dp$$

$$+ \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \int_{r_0}^{R} \left\{ e^{P\sqrt{-1}} f(re^{P\sqrt{-1}}) - e^{p_0\sqrt{-1}} f(re^{p_0\sqrt{-1}}) \right\} dr,$$

$$\mathop{\mathcal{E}}_{(0)\ (-\pi)}^{(R)\ (\pi)}((f(z))) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re^{p\sqrt{-1}} f(Re^{p\sqrt{-1}}) dp.$$

Dans ces dernières formules, r, p représentent des coordonnées polaires liées aux coordonnées rectangulaires x, y, par l'équation imaginaire

$$x+y\sqrt{-1} = re^{p\sqrt{-1}},$$

ou, ce qui revient au même, par les deux équations réelles

$$x = r\cos p, \qquad y = r\sin p.$$

De plus x_0, y_0, r_0, p_0 et X, Y, R, P désignent des valeurs particulières des quatre variables x, y, r, p.

Il est bon d'observer qu'en vertu de la formule (2) le module de l'expression $\mathcal{E}((f(z)))$ sera inférieur au produit

$$\frac{c}{2\pi} \Lambda f(z),$$

si l'on indique à l'aide de la lettre Λ la plus grande valeur que puisse acquérir le module de la fonction $f(z)$ pour un point situé sur le contour $OO'O''\ldots$

Concevons, pour fixer les idées, que, les fonctions $\mathfrak{f}(z)$, $F(z)$, étant finies et continues, ainsi que la dérivée $\mathfrak{f}'(z)$ de $\mathfrak{f}(z)$, pour toutes les valeurs de z correspondantes à des points renfermés dans le contour $OO'O''\ldots$, on prenne

$$f(z) = \frac{\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)} F(z).$$

L'équation (1) sera réduite à

$$\mathfrak{f}(z) = 0.$$

Si d'ailleurs on représente par m le nombre des racines de l'équation (3) qui correspondent à des points renfermés dans le contour $OO'O''\ldots$, et par $z_1, z_2, \ldots z_m$ ces mêmes racines, on aura, en vertu de la formule (2),

(4)
$$m = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^c \frac{\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)} \frac{\partial z}{\partial s} \partial s,$$

(5)
$$z_1 + z_2 + \cdots + z_m = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^c z \frac{\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)} \frac{\partial z}{\partial s} \partial s,$$

(6)
$$F(z_1) + F(z_2) + \cdots + F(z_m) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_0^c F(z) \frac{\mathfrak{f}'(z)}{\mathfrak{f}(z)} \frac{\partial z}{\partial s} \partial s.$$

Soient maintenant x une variable réelle, et $\varphi(x)$ une fonction de cette variable, qui devienne infinie pour $x = a$. Si l'on fait

croître x, la fonction $f(x)$ passera, en devenant infinie, du négatif au positif, ou du positif au négatif, ou bien elle ne changera pas de signe. La quantité $+1$, dans le premier cas, -1, dans le second, zéro, dans le troisième est ce que je nomme l'indice de la fonction $f(x)$ pour la valeur donnée a de la variable x. L'indice intégral de $f(x)$, pris entre les limites

$$x = x_0, \text{ et } x = X > x_0,$$

n'est autre chose que la somme des indices correspondants aux diverses valeurs de x, qui, rendant la fonction $f(x)$ infinie entre ces limites, représentent des racines réelles de l'équation

(7)
$$\frac{1}{f(x)} = 0.$$

Je désigne cet indice intégral à l'aide de la lettre $\mathcal{I}$, et par la notation

(8)
$$\mathcal{I}_{x_0}^{X} ((f(x)))$$

l'usage des doubles parenthèses étant ici le même que dans le calcul des Résidus. Lorsque la limite x_0 est une racine de l'équation (7), le terme correspondant à $x = x_0$, dans la somme représentée par l'expression (8), doit être réduit à $+\frac{1}{2}$ ou à $-\frac{1}{2}$, suivant que la fonction $f(x)$ devient positive ou négative pour des valeurs de x croissantes au delà de x_0. Pareillement, lorsque X est une racine de l'équation (7), le terme correspondant à $x = X$, dans la somme représentée par l'expression (8), doit être réduit à $+\frac{1}{2}$ ou à $-\frac{1}{2}$, suivant que la fonction $f(x)$ devient négative ou positive pour des valeurs de x décroissantes au dessous de X. Cela posé, en partant de l'équation identique

$$\int_{x_0}^{X} \frac{f'(x)\sqrt{-1}}{1 + f(x)\sqrt{-1}}\, dx = \int_{x_0}^{X} \frac{f'(x)}{f(x) - \sqrt{-1}}\, dx,$$

on établira sans peine la proposition suivante.

Théorème. La somme des deux indices

(9) $$\mathcal{J}_{x_0}^{X}((f(x))), \quad \mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right)$$

est équivalente à +1, à −1, ou à zéro, suivant que les deux quantités

$$f(X), \qquad -f(x_0)$$

sont toutes deux positives ou toutes deux négatives, ou l'une posi-tive et l'autre négative; de sorte qu'on a généralement

(10) $$\mathcal{J}_{x_0}^{X}((f(x))) + \mathcal{J}_{x_0}^{X}\left(\left(\frac{1}{f(x)}\right)\right) = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{J}_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{f(X)}{((x))} - \mathcal{J}_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{f(x_0)}{((x))}\right\},$$

ε désignant un nombre infiniment petit.

Lorsque la fonction $f(x)$ se présente sous la forme d'une frac-tion rationnelle, et que le degré du numérateur surpasse le degré du dénominateur, on peut, dans la détermination de l'indice (8), substituer au numérateur de la fraction rationnelle le reste qu'on obtient en le divi-sant par le dénominateur. On pourra ensuite, en vertu de la formule (10), échanger entre eux les deux termes de la fraction restante. Or, à l'aide de ces opérations plusieurs fois répétées, on finira par déterminer complè-tement l'indice intégral d'une fraction rationnelle quelconque, et cette détermination se trouvera réduite à la recherche du plus grand commun divi-seur algébrique de deux polynomes entiers.

Revenons maintenant à la formule (4), et soient $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$, deux fonctions réelles déterminées par la formule

(11) $$f(x+y\sqrt{-1}) = \varphi(x,y) + \sqrt{-1}\,\chi(x,y).$$

Posons d'ailleurs, pour abréger,

(12) $$\psi(x,y) = \frac{\varphi(x,y)}{\chi(x,y)}.$$

Enfin soient $\varphi(s)$, $\chi(s)$ et $\psi(s)$ ce que deviennent les fonctions $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ et $\psi(x,y)$, quand on exprime les coordonnées x, y en fonction de l'arc s. On

tirera de la formule (4)

(13) $$m = \frac{1}{2} \mathcal{J}_0^c ((\psi(s))).$$

Il y a plus. Comme, en désignant par la lettre θ une constante réelle, on peut, sans altérer l'équation (3), y remplacer la fonction $f(z)$ par le produit

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) f(z);$$

il en résulte que, dans la formule (12), on pourra aux fonctions $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ substituer celles qui, dans le produit

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)\{\varphi(x,y) + \sqrt{-1}\chi(x,y)\},$$

représentent la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$, et poser en conséquence

(14) $$\psi(x,y) = \frac{\varphi(x,y)\cos\theta - \chi(x,y)\sin\theta}{\chi(x,y)\cos\theta + \varphi(x,y)\sin\theta}.$$

Si, dans cette dernière formule, on attribue à θ, 1° une valeur nulle, 2° la valeur $\frac{\pi}{2}$, on obtiendra successivement l'équation (12) et la suivante

(15) $$\psi(x,y) = -\frac{\chi(x,y)}{\varphi(x,y)}.$$

Lorsque le contour $OO'O''\ldots$ est formé de plusieurs lignes droites ou courbes, alors, pour faciliter le calcul du nombre m déterminé par la formule (13), on peut décomposer l'indice intégral

$$\mathcal{J}_0^c((\psi(s)))$$

en plusieurs parties correspondantes à ces mêmes lignes, et substituer, dans chaque partie, à la variable s une autre variable t qui croisse ou décroisse tandis que s augmente. Cela posé, si l'on réduit le contour $OO'O''\ldots$ à un rectangle dont les côtés soient parallèles aux axes des x, y; ou au système de deux droites menées par l'origine et de deux arcs de cercle qui aient cette origine pour centre, ou bien encore à la circonférence entière d'un cercle décrit de cette origine avec le rayon R, etc., on trouvera successivement

(16) $$m = \frac{1}{2}\left\{ \mathcal{J}_{x_0}^{X}((\psi(x,y_0))) + \mathcal{J}_{y_0}^{Y}((\psi(X,y))) - \mathcal{J}_{x_0}^{X}((\psi(x,Y))) - \mathcal{J}_{y_0}^{Y}((\psi(x_0,y))) \right\},$$

$$(17)\qquad m = \frac{1}{2}\left\{ \begin{array}{l} \int_{r_0}^{R} \left(\left(\psi(r\cos p_0, r\sin p_0) \right)\right) + \int_{p_0}^{P} \left(\left(\psi(R\cos p, R\sin p) \right)\right) \\ - \int_{r_0}^{R} \left(\left(\psi(r\cos P, r\sin P) \right)\right) - \int_{p_0}^{P} \left(\left(\psi(r_0\cos p, r_0\sin p) \right)\right) \end{array} \right\},$$

$$(18)\qquad m = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left(\psi(R\cos p, R\sin p) \right)\right),$$

etc...

Les diverses valeurs de m pourront être aisément calculées à l'aide de la formule (10), si la fonction $f(z)$ est entière, puisqu'alors les seconds membres des formules (16), (17), (18) renfermeront seulement des fonctions rationnelles de la variable x, ou de la variable y, ou du rayon vecteur r, ou de l'expression imaginaire

$$e^{p\sqrt{-1}} = \frac{1 + \tang \frac{p}{2} . \sqrt{-1}}{1 - \tang \frac{p}{2} . \sqrt{-1}},$$

et par conséquent de $\tang \frac{p}{2}$. Il est facile d'en conclure que, pour une équation algébrique de degré quelconque, la détermination du nombre des racines qui offriront des modules inférieurs à un nombre donné sera réduite à la recherche du plus grand commun diviseur algébrique de deux polynomes dont les degrés ne surpasseront pas celui de la proposée, et qu'on pourra en dire autant de la détermination du nombre des racines, dans lesquelles le module r et l'arc p, ou la partie réelle x et le coefficient y de $\sqrt{-1}$ resteront compris entre des limites données. Si l'équation $f(z)=0$ n'a point de racines égales, alors, en désignant par ε un nombre infiniment petit, et posant $y_0 = -\varepsilon$, $Y = \varepsilon$, on tirera de la formule (16)

$$(19)\qquad m = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{X} \left(\left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)\right).$$

On peut d'ailleurs s'assurer directement que, dans tous les cas, la valeur précédente de m est précisément le nombre des racines réelles et distinctes de l'équation (3) renfermées entre les limites x_0, X. De la formule (19), jointe à l'équation (10) on déduit immédiatement le théorème de Descartes ainsi que plusieurs autres théorèmes dignes de remarque publiés par l'abbé Degua, par MM. Budan et Fourier, et par M. Ch. Sturm.

Si l'on voulait déterminer la différence μ entre le nombre

des racines positives distinctes, inférieures à un nombre donné R, et le nombre des racines négatives distinctes, supérieures à $-R$, il faudrait recourir à la formule

(20) $$\mu = \frac{1}{2} \int_{-R}^{R} \left(\left(\frac{x f'(x)}{f(x)} \right)\right),$$

et de cette dernière formule, jointe à l'équation (10), on déduirait facilement un théorème à l'aide duquel j'ai démontré le premier, dans le journal de l'école Polytechnique, que, pour toute équation algébrique, on peut trouver des fonctions rationnelles des coefficients dont les signes fournissent le moyen de déterminer le nombre des racines réelles positives et le nombre des racines réelles négatives.

Il suit encore des formules (12) et (16) que, si l'équation $f(z)=0$ est algébrique et du degré n, le nombre m des racines qui offriront des parties réelles supérieures à une quantité donnée a, sera, pour des valeurs paires de n

(21) $$m = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{\chi(a,y)}{\varphi(a,y)} \right)\right),$$

et, pour des valeurs impaires de n,

(22) $$m = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{\varphi(a,y)}{\chi(a,y)} \right)\right).$$

On aura d'ailleurs, quel que soit n,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{\varphi(a,y)}{\chi(a,y)} \right)\right) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{\chi(a,y)}{\varphi(a,y)} \right)\right) = \pm 1,$$

le double signe devant être réduit au signe $+$ ou au signe $-$, suivant que le rapport

$$\frac{\varphi(a,y)}{\chi(a,y)}$$

deviendra positif ou négatif pour des valeurs infinies de y.

Au reste, quelle que soient la fonction $f(z)$ et le contour $OO'O''\ldots$, il résulte des formules (10) et (13) que le nombre des racines de l'équation $f(z)=0$ correspondantes à des points renfermés dans le contour dont il s'agit se calculera aisément, si, pour chaque portion de ce contour, $\psi(x,y)$ peut être exprimé rationnellement en fonction de la variable s, ou

même d'une autre variable t.

Concevons à présent que, la fonction $f(z)$ étant décomposée en deux parties $\Pi(z)$, $\varpi(z)$, le module du rapport $\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}$ reste, pour tous les points situés sur le contour $OO'O''\ldots$ inférieur à l'unité, en sorte qu'on ait tout à la fois

(25) $$f(z) = \Pi(z) + \varpi(z),$$

et

(26) $$\Lambda\,\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)} < 1$$

On conclura de la formule (4) que les racines correspondantes à des points renfermés dans le contour $OO'O''\ldots$ sont en même nombre pour l'équation (3) et pour la suivante

(27) $$\Pi(z) = 0.$$

De plus, si l'on désigne ces racines par $z_1, z_2, \ldots z_m$ pour l'équation (3), et par $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ pour l'équation (27), on tirera de la formule (6) jointe à la formule (2)

(28) $$F(z_1) + F(z_2) + \cdots + F(z_m) = F(\xi_1) + F(\xi_2) + \cdots + F(\xi_m) + \mathcal{E}\left(\left(\frac{\partial l\left(1+\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)}{\partial z}\,F(z)\right)\right);$$

puis, en supposant remplie la condition (26),

(29) $$\left\{\begin{array}{l} F(z_1) + F(z_2) + \cdots + F(z_m) = F(\xi_1) + F(\xi_2) + \cdots + F(\xi_m) \\ - \mathcal{E}\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\,F'(z)\right)\right) + \frac{1}{2}\,\mathcal{E}\left(\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^2 F'(z)\right)\right) - \frac{1}{3}\,\mathcal{E}\left(\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^3 F'(z)\right)\right) + \text{etc.}\end{array}\right.$$

Donc alors la somme

$$F(z_1) + F(z_2) + \cdots + F(z_m)$$

sera développable en une série convergente dont les différents termes s'exprimeront en fonctions des racines $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$ de l'équation auxiliaire $\Pi(z) = 0$. Ajoutons qu'en vertu de la formule (2) le module du terme général de cette série, c'est-à-dire, le module de l'expression

(30) $$\frac{1}{n}\,\mathcal{E}\left(\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^n F'(z)\right)\right)$$

sera inférieur à la quantité

(31) $$\frac{c}{2n\pi}\Lambda\left[\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^n F'(z)\right]$$

et, à plus forte raison, au produit

(32) $$\frac{cN}{2\pi}\,\frac{M^n}{n}$$

les valeurs de M, N étant respectivement

(33) $$M = \Lambda\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)},\qquad N = \Lambda F'(z).$$

Donc la somme faite du terme (30) et de ceux qui le suivent, ou le reste de la série offrira un module inférieur à

$$\frac{cN}{2\pi}\left(\frac{M^n}{n}+\frac{M^{n+1}}{n+1}+\dots\right) < \frac{cN}{2\pi}\left(\frac{M^n}{n}+\frac{M^{n+1}}{n}+\dots\right),$$

et par conséquent à

(34) $$\frac{cN}{2\pi}\,\frac{M^n}{n(1-M)}.$$

Si l'on prend $F(z)=z$, la formule (29) deviendra

(35) $$\begin{cases} z_1+z_2+\dots+z_m = \xi_1+\xi_2+\dots+\xi_m \\ -\mathcal{E}\left(\!\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)\!\right)+\frac{1}{2}\mathcal{E}\left(\!\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^2\right)\!\right)-\frac{1}{3}\mathcal{E}\left(\!\left(\left(\frac{\varpi(z)}{\Pi(z)}\right)^3\right)\!\right)+\text{etc.}\dots, \end{cases}$$

et le reste de la série ne surpassera pas le produit

(36) $$\frac{c}{2\pi}\,\frac{M^n}{n(1-M)}.$$

Les formules qui précèdent comprennent comme cas particulier celles que Lagrange et M. Paoli ont données pour le développement des fonctions en séries. Si, pour fixer les idées, on suppose $\Pi(z)=(z-a)^m$, a désignant une constante arbitrairement choisie, l'équation (3) sera réduite à

(37) $$(z-a)^m+\varpi(z)=0;$$

et la formule (29) donnera

(38) $$F(z_1)+F(z_2)+\dots+F(z_m) = mF(a)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,\frac{1}{1.2\dots(mn-1)}\,\frac{\partial^{mn-1}\{(\varpi(a))^n F'(a)\}}{\partial a^{mn-1}},$$

pourvu que l'on ait $\Lambda\frac{\varpi(z)}{(z-a)^m}<1$. Si l'on réduisait le nombre m à l'unité, alors, à la place de l'équation (38) on retrouverait la formule de Lagrange, savoir

(39) $$F(z) = F(a)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{1.2\dots n}\,\frac{\partial^{n-1}\{\varpi(a)^n F'(a)\}}{\partial a^{n-1}}.$$

Turin ce 17 Decembre 1831.